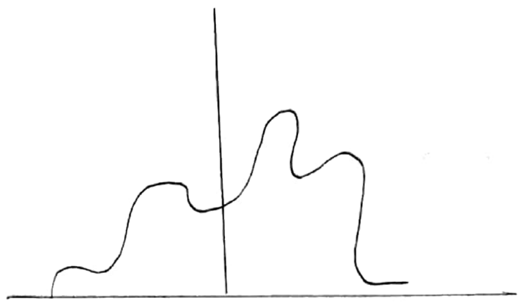
Διακύμανση

Ορισμός: Τ.μ. X, $E(X)=\mu$

$$Var(X) = \sigma^2 = E(x-\mu^2) = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^2 p_X(x), & X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x), & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$



Τυπική Απόκλιση

Πρόταση: $Var(X) = E(X^2) - (E(x))^2$

Διακύμανση συνάρτησης τ.μ.

Έστω τ.μ. X και g συνάρτηση

$$Var[g(x)] = E[g(x)^2] - E[g(x)]^2$$

Ιδιότητες Διακύμανσης:

α) $Var(a) = 0$, a: σταθερά

β) $Var(ax+b) = a^2 Var(x)$

ή

$$Var[ag(x)+b] = a^2 Var[g(x)]$$

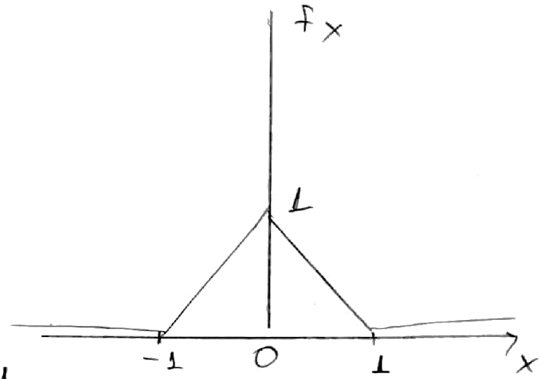
Παράδειγμα: Έστω τ.μ. X τριγωνική κατανομή

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-|x| & , -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{Αλλού} \end{cases}$$

$E(x)$, $Var(x) = ;$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & , -1 < x \leq 0 \\ 1-x & , 0 \leq x < 1 \\ 0 & , x \text{ αλλού} \end{cases}$$ ← Για να βγάλω το απόλυτο

- $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx$



- $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx = 0$

- $Var(x) = E(x^2) - [\cancel{E(x)}]^2$ → 0 αφού $E(x)=0$ $= E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx =$

$\int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{6} > 0$ πάντα θετικό

Παράδειγμα: Κάλπη: 8 Α, 4 Μ, 2 Κ — 2 με επανατοποθέτηση → -1, +2, 0

i) Είναι το παιχνίδι δίκαιο;

ii) Ποια η διακύμανση του κέρδους;

Έστω X κέρδος. Ζητείται η $E(x) = ;$

Τιμές X	-2	-1	0	1	2	4
	ΑΑ	ΑΚ (ν) ΚΑ	ΚΚ	ΑΜ (ν) ΜΑ	ΑΚ (ν) ΚΜ	ΜΜ

$$E(x) \underset{\text{διακριτή}}{=} \sum_{x=-2,-1,0,1,2,4} x\, p_x(x)$$

$$P_x(-2) = P(x=-2) = P(AA) = \frac{8}{14}\cdot\frac{8}{14}$$

$$p_x(-1) = P(x=-1) = P(AK \text{ ή } KA) = P(AK) + P(KA) = \frac{8}{14}\cdot\frac{2}{14} + \frac{2}{14}\cdot\frac{8}{14}$$

$$= 2\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{2}{14}$$

κ.ο.κ

$$P_x(x) = \begin{cases} \frac{64}{196}, & x=-2 \\ \frac{32}{196}, & x=-1 \\ \frac{4}{196}, & x=0 \\ 64/196, & x=1 \\ 16/196, & x=2 \\ 16/196, & x=4 \end{cases}$$

$$E(x) = \sum_x x\, p_x(x) = (-2)\frac{64}{196} + (-1)\frac{32}{196} + \dots + 4\,\frac{16}{196} = 0$$

Άρα το παιχνίδι είναι δίκαιο

$$ii)\ Var(x) = E(x^2) - [\cancel{E(x)}]^2 = \sum_x x^2 p_x(x) =$$

$$= (-2)^2\frac{64}{196} + \dots + 4^2\frac{16}{196} = 3{,}4286$$

ΡΟΠΕΣ

Ορισμός: (Απλές ροπές ή ροπές περί το μηδέν)
Έστω τ.μ. X. Η απλή ροπή κ-τάξης, $\kappa \in \mathbb{N}$ συμβολίζεται με μ_κ, $\kappa=1,2$
και ορίζεται $\mu_\kappa = E(X^\kappa) = \begin{cases} \sum_x x^\kappa p_x(x), & X \text{ διακριτ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$

Παρατήρηση:
Αν $\kappa=1$ τότε $\mu_1 = E(x)$

Scanned by CamScanner

Ορισμός: (Κεντρικές ροπές ④ ροπές μέχρι τη μέση τιμή)

Έστω τ.μ. X με μέση τιμή $\mu = E(x)$

Η k-τάξης κεντρική ροπή της X συμβολίζεται με V_k, $k = 1, 2, \dots$

$$V_k = E(x-\mu)^k = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^k P_x(x), & X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k f_x(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Αν $k=2$, τότε $V_2 = Var(X)$

Σύνδεση Απλών-Κεντρικών ροπών:

Πρόταση: $V_k = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \mu_1^{\,r} \mu_{k-r}$, $k = 1, 2, \dots$

Απόδειξη: $V_k \overset{\text{ορ.}}{=} E\left[(x-\mu)^k\right] \xrightarrow[\text{Νεύτωνα}]{\text{Διων.}} E\left[\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-\mu)^r x^{k-r}\right]$

$\xrightarrow[\text{της } E(x)]{\text{ιδιοτ.}} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-\mu)^r E(x^{k-r}) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \mu_1^{\,r} \mu_{k-n}$

Πρόταση: Αν X μία συνεχής τ.μ. με σ.π.π. f_x συμμετρική γύρω από την $\mu = E(x)$. Τότε $V_k = 0$, $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$

Συντελεστής λοξότητας: Έστω τ.μ. X με κεντρικές ροπές V_k, $k = 1, 2, \dots$ ο συντελεστής λοξότητας (ή ασυμμετρίας) συμβολίζεται με B και ορίζεται

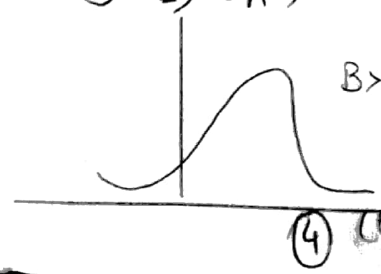
$B = \frac{V_3}{\sigma^3}$, $\sigma = +\sqrt{Var\,X}$

Αν η f_x συμμετρική γύρω από το μ τότε $V_3 = 0$, άρα $B = 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Ισχύει όμως το εξής: Αν $B \neq 0$: τότε η f_x <u>ΔΕΝ</u> είναι ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ γύρω από το μ.

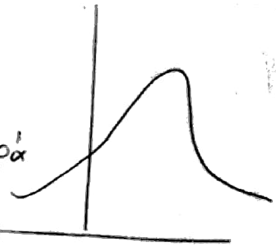
($A \to B$ τότε $\sim B \to \sim A$)

Αν $B>0$ τότε η f λοξή ως προς τα δεξιά



④ (θετική ασυμμετρία)

Αν $B<0$ τότε η f_x λοξή προς τα αριστερά (αρνητική ασυμμετρία)



Συντελεστής Κυρτότητας: Έστω τ.μ. X με κεντρικές ροπές V_k, $k=1,2\dots$ Ο συντελεστής κύρτωσης συμβολίζεται με γ.

$$\gamma = \frac{V_4}{\sigma^4} \quad , \quad \sigma = +\sqrt{Var(x)}$$

$\gamma_1 < \gamma_2$

Ροπές:

$\xrightarrow{\text{απλές}}$ $\mu_k = E(X^k)$

$\xrightarrow{\text{κεντρικές}}$ $V_k = E(x-\mu)^k$

Ροπογεννήτρια:

Ορισμός: Έστω τ.μ. X. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X συμβολίζεται με m_X και ορίζεται:

$$m_X(t) \overset{\text{ορ.}}{=} E(e^{tx}) = \begin{cases} \sum\limits_x e^{tx} p_X(x), & X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

$, t \in \mathbb{R}$

Ιδιότητες: ① Η m_X υπάρχει σε μία περιοχή του 0. Πράγματι $m_X(0) \overset{\text{ορ.}}{=}$

$$E(e^{0x}) = E(1) = 1$$

② Έστω τ.μ. $Y = ax+b$ γραμμ. μετασχηματισμός X, $t \in \mathbb{R}$

$$m_Y(t) \overset{\text{ορ.}}{=} E(e^{ty}) = E(e^{atx+tb}) = E(e^{tb} e^{atx}) = e^{tb} E(e^{atx}) \overset{\text{ορ}}{=}$$

$$e^{tb} \cdot m_X(at)$$

③ Η ροπογεννήτρια παράγει τις ροπές:

$$\frac{d}{dt} m_X(t) \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} e^{tx}\right) f_X(x) dx$$

ή $$\frac{d}{dt} m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f_X(x)\, dx$$

2η παράγωγο !

$$\frac{d^2}{dt^2} m_x(t) = \ldots\ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{d}{dt} e^{tx}\right) f_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{tx} f_x(x)\,dx$$

$\vdots$

$$\frac{d^k}{dt^k} m_x(t) = \ldots\ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{tx} f_x(x)\,dx$$

$$\left.\frac{d^k}{dt^k} m_x(t)\right|_{t=0} = \mu_k, \quad k=1,2,\ldots$$

Αντίστροφο ?

Αν ξέρω τις ροπές έχω πληροφορία για $m_x(t)$;

$$m_x(t) \stackrel{op.}{=} E(e^{tx}) = E(e^{tx}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!}\right) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} x^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(x^k) \Rightarrow m_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mu_k$$

Γνώση ροπών $\underset{\text{οδηγεί}}{\overset{\text{οδηγεί}}{\Longleftrightarrow}}$ ροπογεννήτρια

④ Θεώρημα Μοναδικότητας Ροπογεννητριών:

Έστω οι τ.μ. X και Y με α.σ.κ. F_X και F_Y. Αν οι ροπογεννήτριες $m_X(t)$ και $m_Y(t)$ υπάρχουν και $m_X(t) = m_Y(t)$, $|t| < c$, $c > 0$

Τότε $F_X(x) = F_Y(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα: Έστω X διακριτή τ.μ. με ροπογεννήτρια

$$m_X(t) = \frac{1}{6} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ποια η σ.π. της τ.μ. X;

X διακριτή

τότε έστω παίρνει τιμές $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$

με σ.π.: $P_X(x_1)$, $P_X(x_2)$, $P_X(x_3)$, $P_X(x_4)$, ...

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} P_X(x_i) = e^{tx_1} P_X(x_1) + e^{tx_2} P_X(x_2) + e^{tx_3} P_X(x_3) + e^{tx_4} P_X(x_4) + \ldots$$

Θεωρία Μονοσήμαντα:

Πρέπει $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=1$, ... $x_i=0$

$P_X(x_1)=\frac{1}{6}$, $P_X(x_2)=\frac{1}{2}$, $P_X(x_3)=\frac{1}{3}$, $i=4, \dots$

και $$P_X(x)=\begin{cases} 1/6, & x=-1 \\ 1/2, & x=-2 \\ 1/3, & x=1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Κατανομή	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
Διωνυμική $B(n,p)$	np	$npq=np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$, $t\in\mathbb{R}$
⋮			
Poisson $P(\lambda)$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$, $t\in\mathbb{R}$
⋮			
Εκθετική $Exp(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/\lambda-t$, $t<\lambda$
⋮			
Κανονική $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$, $t\in\mathbb{R}$